www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
M'-Math 3
page 133
1989 1

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES

OPTION MATHEMATIQUES — JUIN 1989

TROISIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES — (Durée : 2 heures)

Il est expressément demandé aux candidats de rédiger avec le plus grand soin les démonstrations. Les candidats peuvent traiter une question en admettant certains résultats des questions précédentes à condition de le mentionner explicitement.

Rappels et Notations :

. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont identifiés à des matrices à une seule colonne et n lignes. Le produit scalaire usuel $(\ldots)_n$ de $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad (x,y)_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

On pose également : $\quad \|x\|_n = (x,x)_n^{1/2} \qquad |||x|||_n = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

. Rappelons que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

On dit qu'une partie G de $\mathbb{R}^n$ est convexe si $\forall (x,y) \in G^2$, G contient le segment $[x,y]$ où $[x,y] = (x + t(y-x) \ / \ 0 \leqslant t \leqslant 1]$.

. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction numérique $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si $\forall (x,y) \in U^2$, $\forall t \in [0,1]$ on a :

$$f(tx + (1-t)\, y) \leqslant t\, f(x) + (1-t)\, f(y)$$

. On admettra qu'une fonction convexe sur U est continue sur U.

On dit qu'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe si $\forall (x,y) \in U^2$, $\forall t \in]0,1[$,

$$x \neq y \Longrightarrow f(tx + (1-t)y) < t\, f(x) + (1-t)\, f(y)$$

ENONCE

1 - Dans tout le problème, G désigne une partie convexe non vide fermée de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

a) Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}^n$, il existe $x \in G$ tel que : $\|x-y\|_n = \inf_{z \in G} \|z-y\|_n$

(On pourra utiliser un argument de compacité).

b) Soient $y \in \mathbb{R}^n$ et $x \in G$. Prouver que :

$$\|x-y\|_n = \inf_{z \in G} \|z-y\|_n \iff \forall v \in G \quad (y-x,\, v-x)_n \leqslant 0$$

(On pourra établir l'identité :

$$\|z-y\|_n^2 = \|z-x\|_n^2 + \|x-y\|_n^2 + 2(y-x,z-x)_n \ ).$$

c) Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}^n$, il existe un et un seul x de G tel que :

$$\|x-y\|_n = \inf_{z \in G} \|z-y\|_n$$

. Dans toute la suite on notera $x = P(y)$ $(\in G)$; P définit une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans G.

d) Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a : $\|P(z) - P(z')\|_n \leqslant \|z-z'\|_n$

2 - . Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ une matrice symétrique réelle et définie positive ; on suppose donc que $\forall (i,j)$, $a_{i,j} = a_{j,i}$ (c'est-à-dire $A = {}^tA$) et que $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus (0)$, $(Ay,y)_n > 0$.

. Montrer alors qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n \quad , \quad (Ay,y)_n \geqslant \alpha\, \|y\|_n^2$$

3 - . Soit J une fonction numérique convexe définie sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $\left(\|x-y\|_n \leqslant \varepsilon \Longrightarrow J(x) \leqslant J(y) \right)$, alors $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $J(x) \leqslant J(y)$.

4 - On considère une matrice symétrique réelle $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ $(A = {}^tA)$ telle que $\forall v \in \mathbb{R}^n$ $(Av,v)_n \geqslant 0$, un élément $f \in \mathbb{R}^n$ et une partie convexe fermée non vide G de $\mathbb{R}^n$. On pose alors pour tout $y \in \mathbb{R}^n$:

$$J_0(y) = \frac{1}{2}\,(Ay,y)_n - (f,y)_n$$

a) Soit $x \in G$. Montrer que :

$$(\forall y \in G \quad J_0(x) \leqslant J_0(y)) \iff (\forall y \in G \quad (Ax - f, y-x)_n \geqslant 0)$$

b) Que représente $Ax - f$ pour la fonction J_0 ?

.../...

c) Considérons une fonction convexe J_1 définie sur $\mathbb{R}^n$; on pose :

$$J(y) = J_0(y) + J_1(y) \ , \ \forall y \in \mathbb{R}^n .$$

. Soit $x \in G$; montrer alors que :

$$(\forall y \in G \quad J(x) \leqslant J(y)) \iff (\forall y \in G, \ (Ax-f, \ y-x)_n + J_1(y) - J_1(x) \geqslant 0 \ )$$

5 - a) On considère un élément f de $\mathbb{R}^n$, une partie convexe fermée non vide G de $\mathbb{R}^n$, un réel $\alpha > 0$ et une matrice symétrique réelle

$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ vérifiant: $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad (Av,v)_n \geqslant \alpha \ |v|_n^2$.

. On pose alors , $\forall v \in \mathbb{R}^n$:

$$J_0(v) = \frac{1}{2} (Av,v)_n - (f,v)_n .$$

. On appelle $\mathcal{P}_0$ le problème suivant :

$$(1) \qquad \text{Déterminer x tel que} \quad \begin{cases} x \in G \\ \forall y \in G \quad J_0(x) \leqslant J_0(y) \end{cases}$$

Montrer que le problème $\mathcal{P}_0$ possède une solution et une seule, notée x.

b) Donner une relation équivalente à (1).

c) Reprenons la fonction P introduite dans le 1)c). A tout réel ρ strictement positif, on associe une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$, construite par récurrence selon le procédé suivant :

$$\begin{cases} x_0 \text{ est donné dans G} \\ \forall m \in \mathbb{N}, \quad x_{m+1} = P[x_m - \rho(Ax_m - f)] \end{cases}$$

. Démontrer alors qu'il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout ρ fixé dans $]0,\rho_0[$, la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ associée à ρ converge lorsque m tend vers l'infini vers la solution x du problème $\mathcal{P}_0$.

6) Application Numérique.

Dans cette question (et dans cette question seulement) on suppose que n = 3, que A est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$, que $f = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que G est la boule unité fermée de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) On définit le problème $\mathcal{P}_0$ comme en 5)a). Déterminer la solution x du problème $\mathcal{P}_0$ et donner ses coordonnées à 10^{-4} près.

b) On pose $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\rho = \frac{1}{2}$, et l'on définit la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ comme au 5)c). Calculer à 10^{-4} près les coordonnées des quatre premiers termes de la suite, x_1, x_2, x_3, x_4 et celles de $x - x_4$.

7 - Nous conservons les notations de 5). Considérons une matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ (k lignes et n colonnes) et un élément $h \in \mathbb{R}^k$.

Posons : $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $J_1(v) = |(Bv-h)|_k = \sum_{i=1}^{k} |(Bv-h)_i|$

et $J(v) = J_0(v) + J_1(v)$.

On appelle $\mathcal{P}$ le problème suivant :

$$(2) \qquad \text{Déterminer x tel que} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ \forall y \in \mathbb{R}^n \ , \quad J(y) \geqslant J(x) \end{cases}$$

a) Démontrer que la fonction J est strictement convexe et que $\lim_{|v|_n \to +\infty} J(v) = +\infty$.

b) Montrer que le problème $\mathcal{P}$ possède une solution et une seule.

c) Donner une relation équivalente à (2).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail